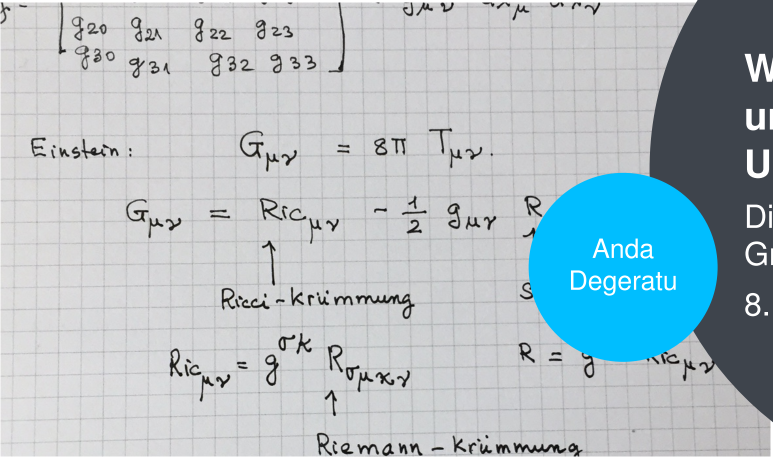
Universität Stuttgart
Institute für Geometrie und Topologie



Wie Gravitationswellen unser Bild vom Universum erweitern

Die Mathematik der Gravitationswellen

Anda Degeratu

8. März 2017

mathematik

LIGO - Pressemitteilung: 11. Februar 2016

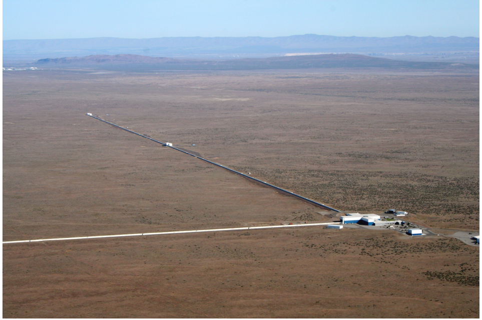
Detektion der Gravitationswellen von der Verschmelzung zweier schwarzen Löcher

Quelle: Caltech/MIT/LIGO Lab und The SXS (Simulating eXtreme Spacetimes) Project

- die Größen vor der Verschmelzung: 29 und 36 Sonnenmassen
- die Größe nach der Verschmelzung: 62 Sonnenmassen
- in pure Energie ungewandelt: 3 Solar Masses
- Entfernung: 1.3 Milliarden Lichjahren
- Beobachtet: am 14. September 2015

Was ist LIGO?

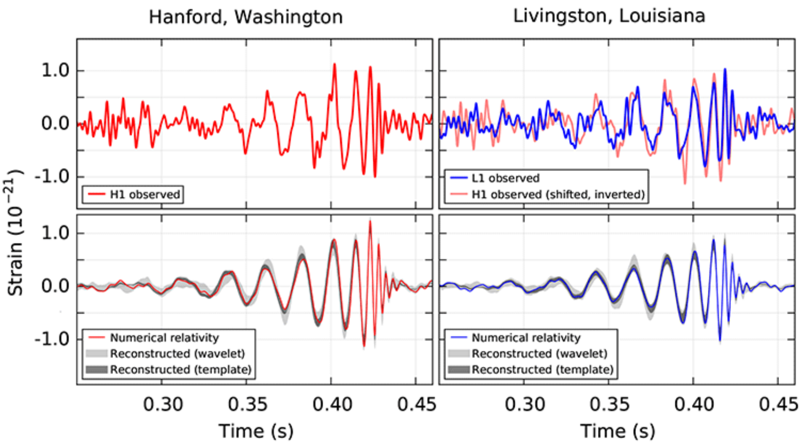
Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory



Zwei Detektoren: Hanford (Washington State) und Livingston (Louisiana)

Foto-Quelle: Caltech/MIT/LIGO Lab

LIGO - Beobachtung: GW150904



Quelle: B.P Abbott et al, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. (2016)

Gravitationswellen

winzige Kräuselungen in der Krümmung der Raumzeit

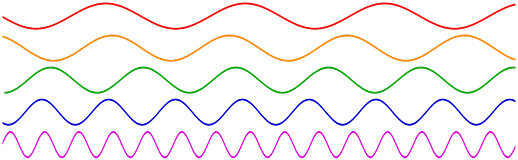
Quelle: Caltech/MIT/LIGO Lab und The SXS (Simulating eXtreme Spacetimes) Project

Gravitationswellen: Vorbermerkungen

Eigenschaften:

- Amplitude (strain): h
- Frequenz: f
- Wellenlänge: λ
- Geschwindigkeit: $c = 3 \times 10^8$ m/s

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{c}{f}$$



Quelle: Wikipedia

Gravitationswellen: Vorbermerkungen

Wie groß, wenn sie LIGO erreichen?

- strain: $h \sim 10^{-21}$
- Frequenz: 10 Hz bis 10 kHz
- Wellenlänge: 30 km bis 30.000 km

Vergleichen:

- Radius des Atoms: 10^{-10} m
- Radius des Protons: 10^{-15} m
- Frequenz des Hörschalles: $20Hz$ to $20kHz$

Nicht sichtbar,
aber hörbar!

Quelle: Caltech/MIT/LIGO Lab und
The SXS (Simulating eXtreme Spacetimes) Project

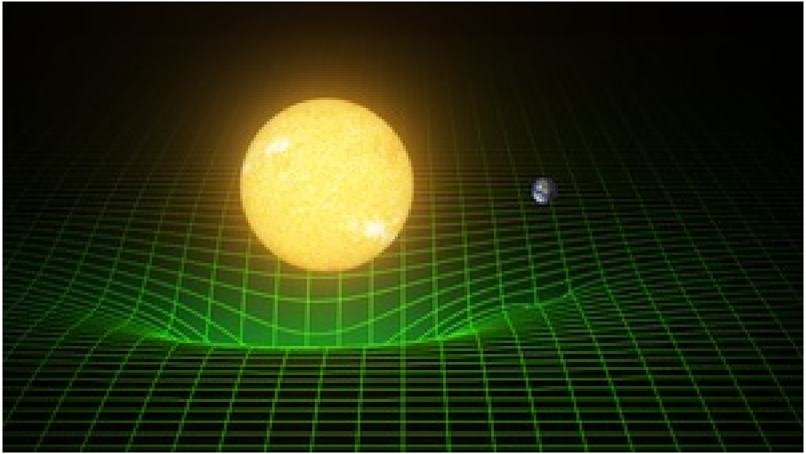
LIGO: Aufbau und Funktionsweise

Quelle: Animation von T. Pyle, Caltech/MIT/LIGO Lab

- Konzept: Interferometer
- Detektorarmen: 4 km.
- Ziel: messe Veschiebung von 10^{-18} m, $1/1000$ Radius des Protons

- 1992 gegründet: Kip Thorne (Caltech), Ronald Drever (Caltech), Rainer Weiss (MIT)
- 40 Jahren Forschung, 1000 Wissenschaftler, 16 Länder, ...

Die Einsteinschen Feldgleichungen: Wie Materie die Raumzeit krümmt



Massive Bodies Warp Space-Time
Image Credit: T. Pyle/Caltech/MIT/LIGO Lab

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu}\, \mathrm{Ric}_{\mu\nu}$$

$$R = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\, \mathrm{Ric}_{\mu\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu} \qquad R = \textstyle\sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=0}^{3} \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\sigma\kappa} R_{\sigma\mu\kappa\nu}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu} \qquad R = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu} \qquad \mathrm{Ric}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3} g^{\sigma\kappa} R_{\sigma\mu\kappa\nu}$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu} \qquad R = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}_{\mu\nu} \qquad \mathrm{Ric}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\kappa=0}^{3} g^{\sigma\kappa} R_{\sigma\mu\kappa\nu}$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\kappa}}\right)$$

Metrik und Abstandmessung

1. Koordinaten im Raumzeit:

$$(t, x, y, z) \quad \text{oder} \quad (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik

$$\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

2. Eine allgemeine Raumzeit (M, g) mit Metrik

$$g = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Lösung der Einsteischen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Gravitationswellen

- Die Einsteinschen Feldgleichungen sind nicht-linear und dynamisch

  Es gibt keinen klaren Unterschied zwischen die Welle und die Hintergrund-Metrik

- Der Begriff von Welle ist nur innerhalb bestimmte Gebiete gültig:
  - die linearisierte Theorie
  - kleine Störung der Hintergrund-Metrik
  - die Post-Newtonsche Theorie (schwache Gravitationsfeld, langsame Bewegung)

- Zwei Denkweisen:
  1. Riemannscher Krümungstensor $R^{GW}_{\alpha\beta\gamma\delta}$
  2. Störung der Hintergrund-Metrik: $g_{\mu\nu} = g^{B}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

Gravitationswellen durch den Minkowski-Raum

- Die Raumzeit-Metrik ist eine kleine Störung der flachen Minkowski-Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

- Eichstransformationen

$$x_\mu^{\text{new}} = x_\mu^{\text{old}} + \xi_\mu(x^{\text{old}}) \quad\Longrightarrow\quad h_{\mu\nu}^{\text{new}} = h_{\mu\nu}^{\text{old}} + \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu = h_{\mu\nu}^{old} + \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

- Lorenz- (harmoniche) Eichung: Für $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{Trace}(h_{\mu\nu})\eta_{\mu\nu}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{4} \partial_\nu(\bar{h}_{\mu\nu}) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \bar{h}_{\mu\nu,\nu} = 0$$

Wir finden so eine Eichung für ξ_μ Lösung der $\Box\xi_\mu = \bar{h}^{\text{old}}_{\mu\nu,\nu}$.

- Die Einsteinschen Feldgleichungen in der Lorenz-Eichung:

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

Im Vakuum, eine bessere Eichung: die TT-Eichung

- Die Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum: $\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$

  Die einfachste Lösung: monochromatische, ebene Wellen

  Alle anderen Lösungen: Überlagerung!

- $\bar{h}_{\mu\nu}$ in der Lorenz-Eichung: $\bar{h}_{\mu\nu,\nu} = 0$

  Aber die Lorenz-Eichung ist nicht eindeutig bestimmt! Jede ξ_μ mit $\Box\xi_\mu = 0$ liefert eine Lorenz-Eichung.

  Gibt es eine Lorenz-Eichung, die besonders guten Eingeschaften hat?

- Ja! Wenn die Welle eine ebene Welle ist: die TT-Eichung

  Transverse zur Ausbreitungsrichtung und Traceless

Eine ebene Welle in Vakuum: die TT-Eichung

Annahme

- $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$
- die Welle breitet sich in der z-Richtung aus: $h_{\mu\nu}(t - z/c) = h_{\mu\nu}(t - z)$

In der TT-Eichung:

$$h^{TT}_{0\mu} = 0, \quad h^{TT}_{z\mu} = 0, \quad h^{TT}_{xx} = -h^{TT}_{yy}, \quad h^{TT}_{xy} = h^{TT}_{yx}$$

Defieniere zwei Polarisationen

$$h_+ = h^{TT}_{xx} = -h^{TT}_{yy} \quad \text{and} \quad h_\times = h^{TT}_{xy} = h^{TT}_{yx}$$

Die Metrik ist nur durch diese zwei Polarisationen gegeben:

$$g = -dt^2 + dz^2 + (1 + h_+(t-z))dx^2 + (1 - h_+(t-z))dy^2 + 2h_\times(t-z)dxdy.$$

Außerdem: Wenn die Welle auch monochromatisch ist, dann

$$h_+(t-z) = A_+ \cos(\omega(t-z)) \quad \text{und} \quad h_\times(t-z) = A_\times \cos(\omega(t-z))$$

- ω ist die Winkelfrequenz der Welle (gemessen in Radian pro Sekunde)
- $f = 2\pi\omega$ ist die Frequenz der Welle, die von LIGO gemessen wird (in Zyklen pro Sekunde)

Kein Vakuum: Die Quadrupolformeln

Eine Quelle mit dem Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$

$$\Box h_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

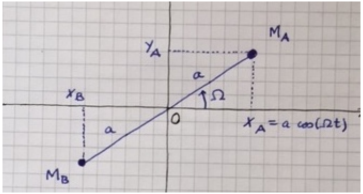
Nach mehreren Näherungen liefert eine Lösung die Quadrupolformel

$$h_{jk}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{2}{r} \int T_{00,00}(t - r, \mathbf{y}) y^j y^k d^3\mathbf{y} \right)^{TT} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{jk}(t - r)^{TT} = \frac{2}{r} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}(t - r)^{TT}$$

- I = das zweite Moment der Massenverteilungen
- $\mathcal{I}$= das Massen-Quadrupolmoment
- der Energieverlust

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \langle \dddot{I}_{jk} \dddot{I}_{jk} \rangle$$

Doppelsternsystem: Zwei Sterne mit Massen M_A und M_B



- Gesamte Masse: $M = M_A + M_B$;
  Reduzierte Masse: $\mu = M_A M_B / M$.
- Annahme: Kreisbahnen
  $2a =$ Abstand zwischen den Massenpunkten
  $\Omega =$ Winkelgeschwindigkeit
  das 3. Kepler-Gesetzt: $\Omega^2 = M/a^3$
- Annahme: die Bahn ist in der xy-Ebene

$$x_A = \frac{M_B}{M} a \cos \Omega t, \qquad x_B = -\frac{M_A}{M} a \cos \Omega t$$
$$y_A = \frac{M_B}{M} a \sin \Omega t, \qquad y_B = -\frac{M_A}{M} a \sin \Omega t$$

- das zweite Moment der Massenverteilungen: $I_{jk} = M_A x_{A,j} x_{A,k} + M_B x_{B,j} x_{B,k}$

$$I_{xx} = \mu a^2 \cos^2 \Omega t, \quad I_{yy} = \mu a^2 \sin^2 \Omega^2 \Omega t, \quad I_{xy} = \mu a^2 \cos \Omega t \sin \Omega t.$$

$$I_{xx} = \mu (\frac{M}{\Omega^2})^{2/3} \cos^2 \Omega t, \, I_{yy} = \ldots \quad \text{mit dem 3. Kepler Gesetz,}$$

Doppelsternsystem, II

- $\ddot{I}_{xx} = -2\mu(M\Omega)^{2/3}\cos 2\Omega t, \quad \ddot{I}_{yy} = 2\mu(M\Omega)^{2/3}\cos 2\Omega t, \quad \ddot{I}_{xy} = -2\mu(M\Omega)^{2/3}\sin 2\Omega t.$
- Die Welle hat Winkel-Frequenz 2Ω. Dann $f = \frac{2\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{\pi}$.
- Es ist eigentlich besser alles in der Kugelcoordinaten θ, ϕ umzuschreiben:

$$h_+ = h^{TT}_{\theta\theta} = -2(1+\cos^2\theta)\frac{\mu(M\Omega)^{2/3}}{r}\cos(2(\Omega t - \Omega r - \phi))$$

$$h_\times = h^{TT}_{\theta\phi} = -4\cos(\theta)^2\frac{\mu(M\Omega)^{2/3}}{r}\sin(2(\Omega t - \Omega r - \phi))$$

- monochromatische Strahlung!!!
- Man kann das benutzen, um eine Abschätzung der erwarteten Amplitude zu bekommen (mit G und c in der obigen Formula eingesetzt)
- Beispiel: $r = 20Mps \sim$ 65 Million Lichtjahren, $M_A = M_B = 10M_{\text{Sonne}}$, $a = 14Km \Longrightarrow h \sim 10^{-21}$ m

Doppelsternsystem, III

- Frequenz der Gravitionswelle: $f = \frac{\Omega}{\pi}$.
- Der Energieverlust

$$\frac{dE_{GW}}{dt} = -\frac{1}{5}[(\dddot{I}_{xx})^2 + (\dddot{I}_{yy})^2 + 2(\dddot{I}_{xy})^2] = -\frac{32}{5}\mu^2 a^2 \Omega^6 = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5}$$
$$\frac{dE_{\text{binary}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu M}{2a}\right)$$

- Es folgt: $a = a_0(1 - t/\tau_0)^{1/4}$ mit

$$\tau_0 = \frac{5}{256}\frac{a_0^4}{\mu M^2} = \frac{5\mathcal{M}}{256(\mathcal{M}\Omega)^{8/3}} \quad \text{die Zeit bis Verschmelzung}$$

und

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} \quad \text{die Chirp-Masse.}$$

- Ähnlich: $df/dt = 3f/8\tau_0$.

Doppelsternsystem, IV

Die vom Gravitationswellen getragenen Information über das Doppelsternsystem:

- aus $\cos(2\Omega t + \text{Phase}) \Longrightarrow$ die Frequenz der Gravitationswellen $f = \Omega/\pi$.
- aus $df/dt = 3f/8\tau_0 \Longrightarrow$ Zeit bis Verschmelzung und die Chirp-Masse
- aus der Amplituden $h_+^{\text{amp}} = -2(1 + cos(\theta)^2)\dfrac{\mu(a\Omega)^2}{r}$ und $h_\times^{\text{amp}} = -4\cos(\theta)^2\dfrac{\mathcal{M}(\pi\mathcal{M}f)^{2/3}}{r} \Longrightarrow$ Bahnneigung-Winkel θ und Distanz bis die Quelle r

Aber:

- Das ist OK nur für die Umkreisung der Sternen mit kleiner Geschwindigkeit
- Spätere Umkreisung: Der Abstand nimmt ab, und die Rotationsgeschwindigkeit nimmt zu.
  Es wird mehr und mehr relativistic, d.h. $v \sim \Omega a \sim \sqrt{M/a}$ nähert $c = 1$
- Man braucht andere Methoden: Post-Newtonsche Korrekturen und Numerische Relativitätstheorie
- Dies Teil der Gravitationswelle enthalt Information über die einzelnen Massen und die Spins der Sternen, etc.

LIGO: die zweite Beobachtung, GW151226

- Die Größen vor der Verschmelzung: 14 und 8 Sonnenmassen
- Die Größe nach der Verschmelzung: 21 Sonnenmassen
- in pure Energie ungewandelt: 1 Sonnenmasse
- Beobachtet: am 26. Dezember 2015

Gravitationswellen, ein neues Fenster zum Universum

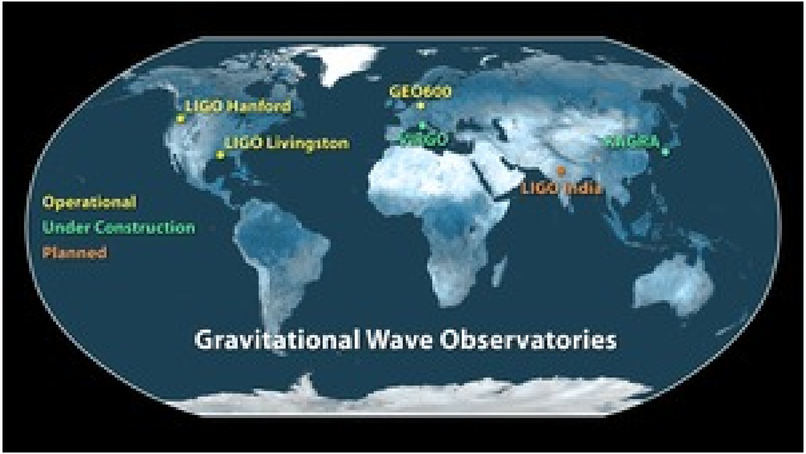
Eine neue Art von Astronomie hat begonnen: Gravitationswellenastronomie

Bis jetzt: das Universum nur durch Elektromagnetische Wellen

1. Sichtbare Astronomie
   - vor 17. Jahrhunderte: mit dem bloßen Augen
   - seit Galileo Galilei: Teleskope
2. 1940: Radioastronomie
   - die Struktur der Milchstraße
   - Entdeckung der Pulsaren und Quasaren, extrem leuchkräftigen Galaxien, und Molekülen im interstellaren Raum.
   - Nachweis der kosmischen Hintergrundstrahlung

     (mit Wellenlängen von etwa eine Millimeter)
3. 1960: Röntgenstrahlen (X-rays)
   - Neutronensterne und schwarze Löcher
   - explodierende Sterne (Supernova)
   - Umgebung der supermassiven schwarzen Löcher im Zentrum der Galaxien

Zukunft: LIGO

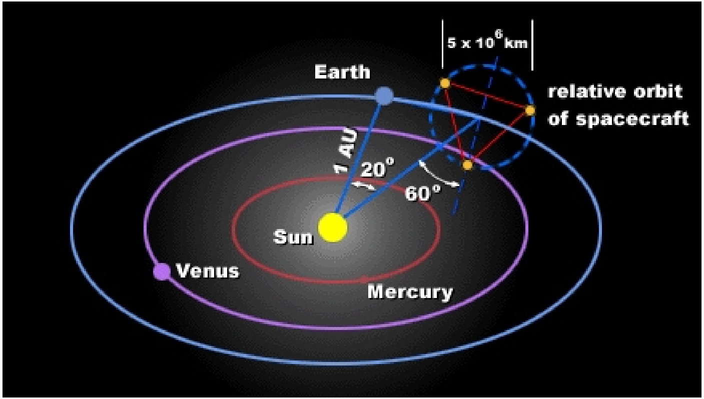


Gravitational Wave Observatories Across the Globe

Image Credit: Caltech/MIT/LIGO Lab

Zukunft: LISA

Laser Interferometer Space Antenna Project



LISA in orbit